

# Применение интеграла

# Некоторые области применения интеграла

1. Вычисление фигуры, ограниченной эллипсом.
2. Площадь фигуры.
3. Площадь поверхности вращения.
4. Применение в физике.
5. Вывод формул объёмов тела вращения.

# Эллипс

**Эллипс**- это замкнутая кривая на плоскости, которая может быть получена как пересечение плоскости и кругового цилиндра или как ортогональная проекция окружности на плоскость. Окружность является частным случаем эллипса.

Эллипс — это «правильный» овал.

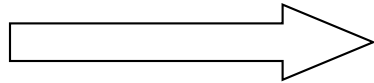
**Овал** — это замкнутая кривая, имеющая две оси симметрии и состоящая из двух опорных окружностей одинакового диаметра, внутренне сопряженных дугами.

$$S = \int_a^b f(x) dx$$

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \quad \alpha \leq t \leq \beta$$

$$\varphi(\alpha) = a$$

$$\varphi(\beta) = b$$



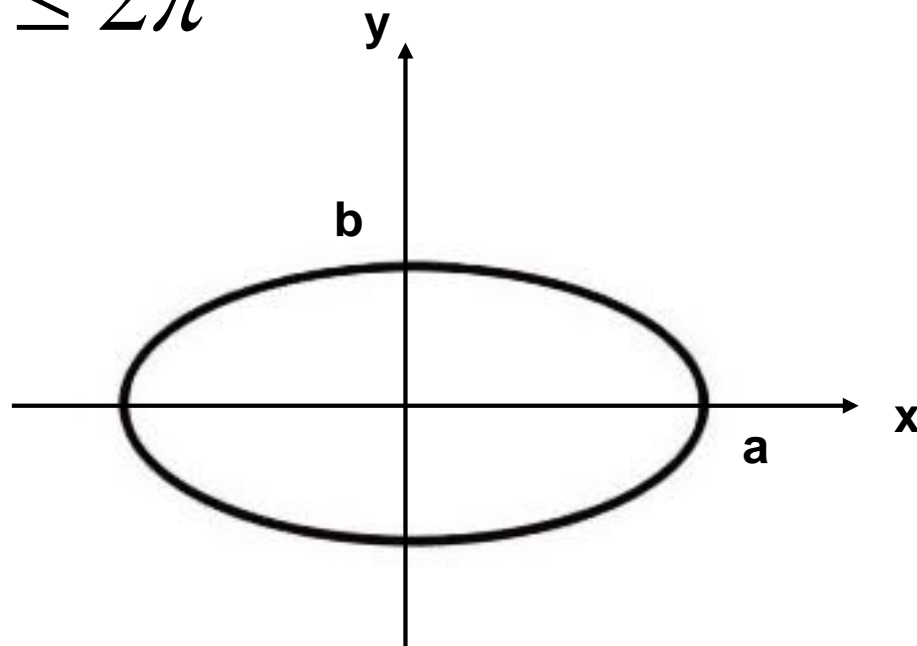
$$x = \varphi(t)$$

$$dx = \varphi'(t)dt$$

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \psi(t) \cdot \varphi'(t) dt$$

Задача 1: вычислить площадь  
фигуры, ограниченной эллипсом

$$\begin{cases} x = a \cos t \\ y = b \sin t \end{cases}, 0 \leq t \leq 2\pi$$



## Задача 2:

Дан прямолинейный стержень длиной  $l$ .  
Он неоднороден, и его плотность в точке,  
удалённой от левого конца на  $x$ ,  $0 \leq x \leq l$   
определяется по формуле

Найдите массу стержня, если

$$\rho(x) = \frac{1}{(2x + 1)^2}, \quad l=1.$$

## Задача 3:

Найти площадь фигуры,  
ограниченной графиком функции

$$y = x^3 - 6x^2 + 9x + 1$$

и касательной к нему в точке  $x=3$ .

## Задача 4:

Пружина в спокойном состоянии имеет длину 0,2 м. Сила в 50 Н растягивает пружину на 0,01 м. Какую работу надо совершить, чтобы растянуть её от 0,22 до 0,32 м? (*использовать закон Гука*).

Площадь поверхности, образованной вращением вокруг оси  $Ox$  дуги кривой, заданной функцией

$$y = f(x), \text{ где } a \leq x \leq b$$

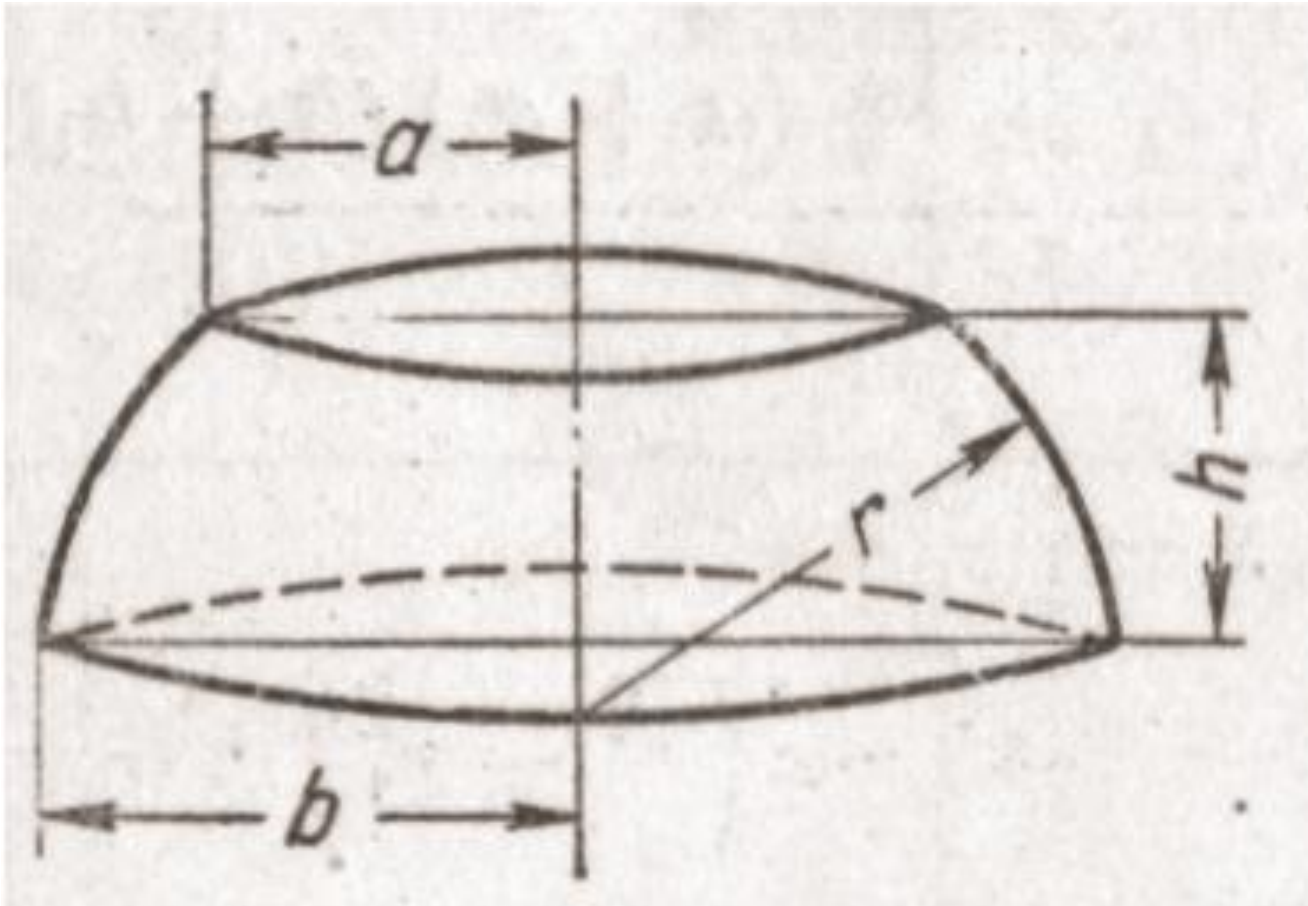
вычисляется по формуле:

$$S = 2\pi \cdot \int_a^b y \cdot \sqrt{1 + (y')^2} dx$$

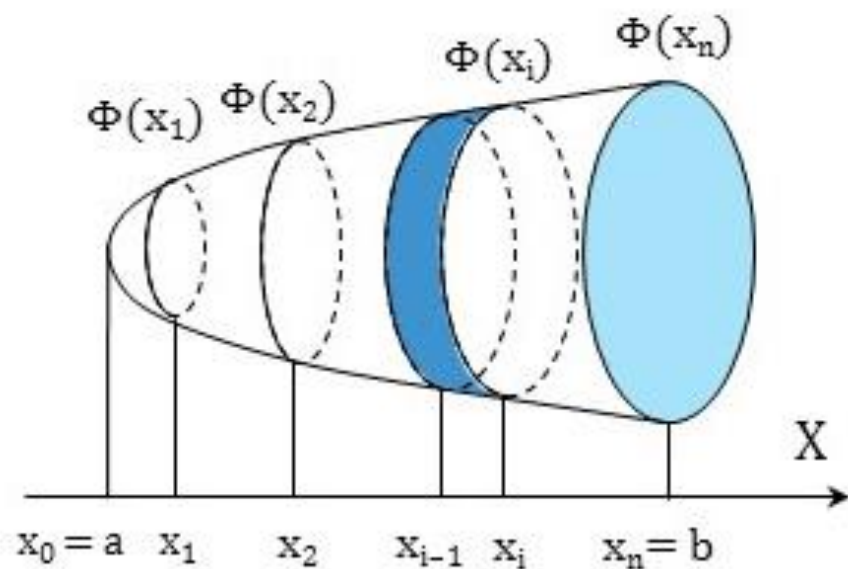
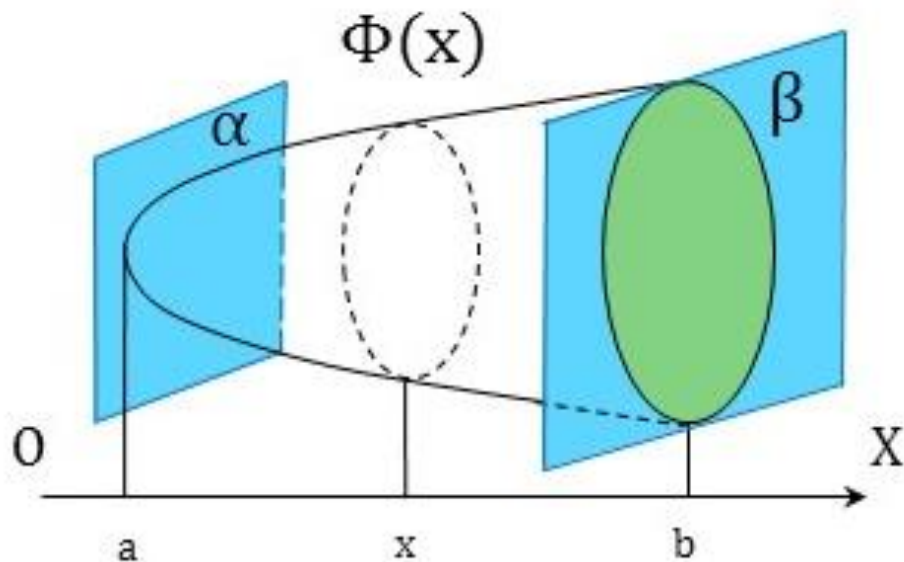
## Задача 5:

Вычислить площадь шарового пояса, полученного при вращении вокруг оси  $Ox$  дуги окружности  $x^2 + y^2 = 4$  между точками с абсциссами  $x = -1$  и  $x = 1 (y > 0)$ .

# Шаровой пояс



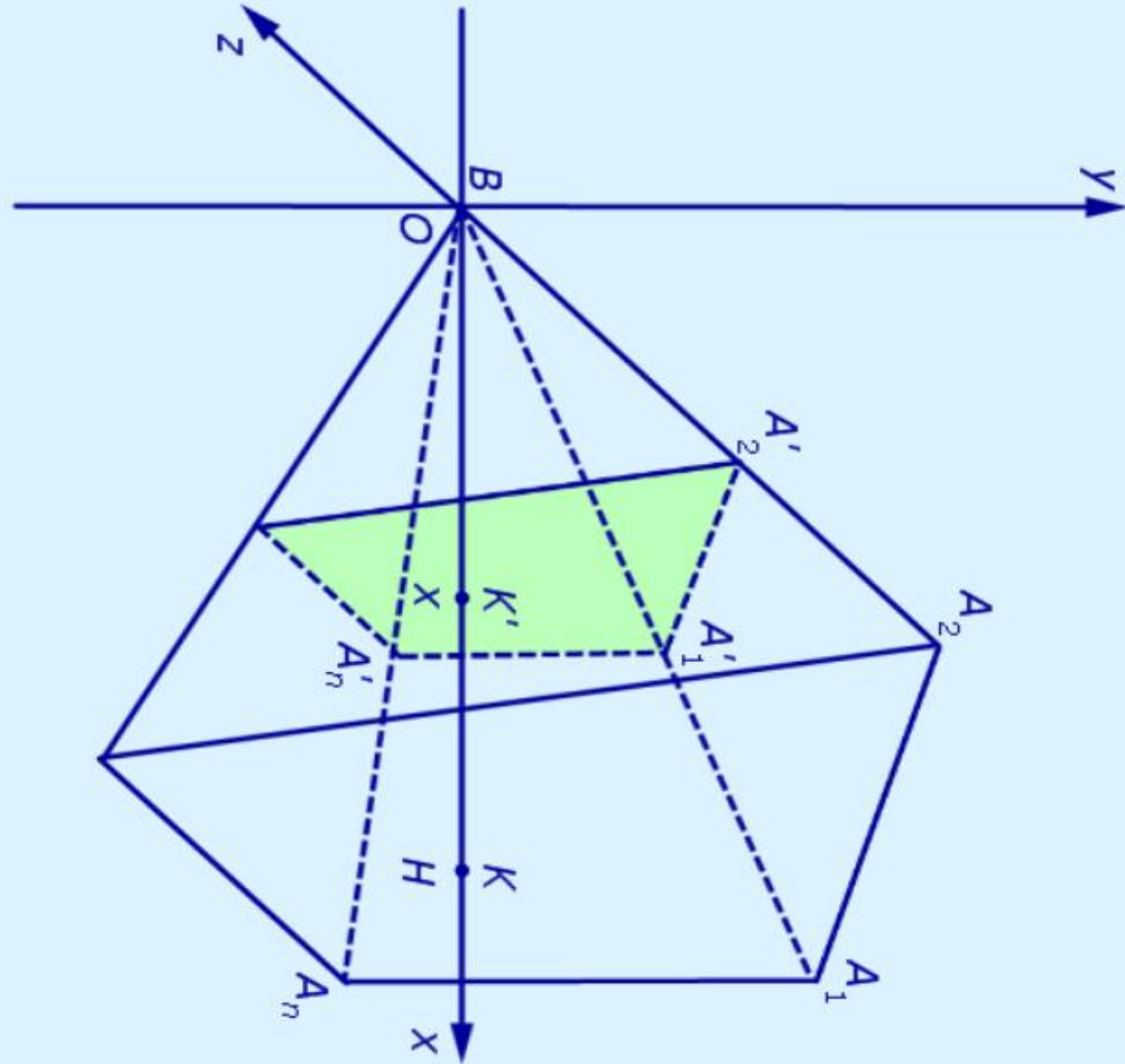
# Вычисление объёмов тел с помощью определённого интеграла



$$V = \int_a^b S(x) dx$$

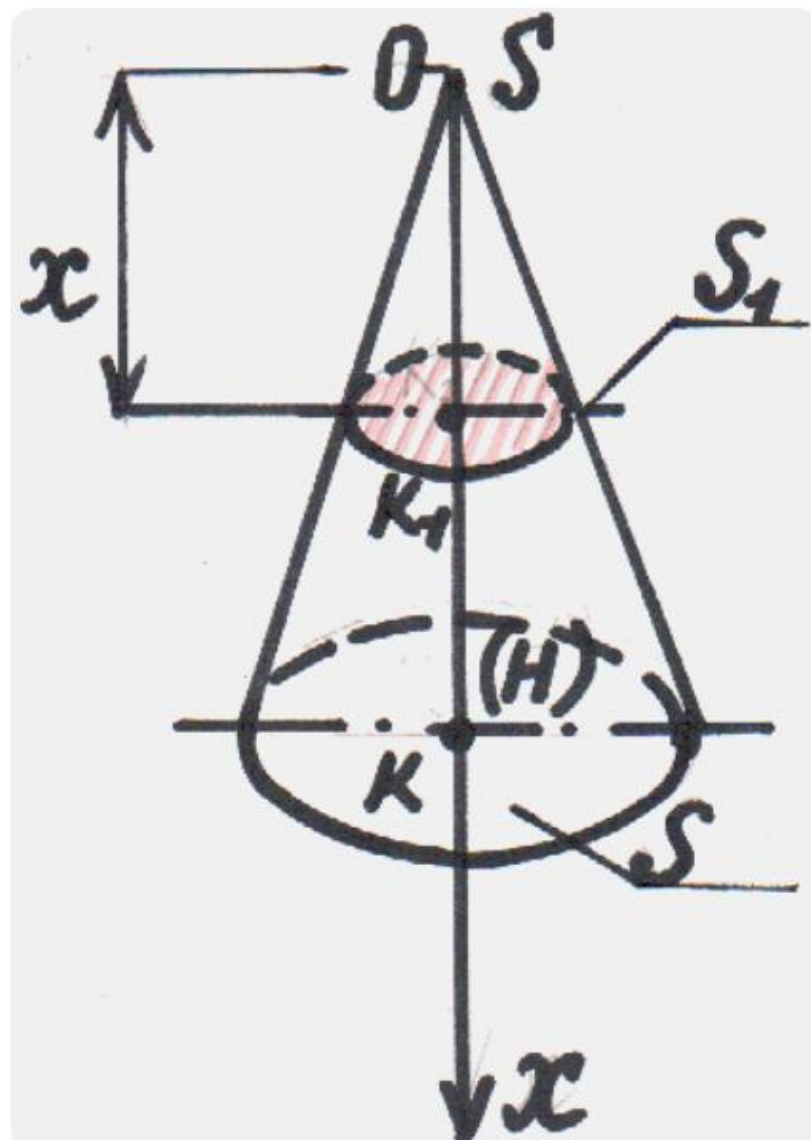
# Задача 6:

Вывести формулу объёма произвольной  $n$ -угольной пирамиды.



# Задача 7:

Вывести формулу объёма конуса.



# Задача 8:

Вывести формулу объёма  
усечённой пирамиды.

